E-IV/ MOUVEMENT RELATIF
الـحـركـة الـنـسـبـيـة

1/ CHANGEMENT DE REPERE :

❖ **Introduction :** Nous avons dit précédemment que l'état de mouvement ou de repos sont deux notions essentiellement relatives ; cela veut dire que chacun des deux états dépend de la position du mobile vis-à-vis du corps pris comme référentiel.

Nous avons rapportés, tous les mouvements que nous avons étudiés jusqu'à présent, à un repère galiléen, c'est-à-dire au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

Dans ce qui suit nous allons répondre principalement aux questions suivantes :

Lorsque deux mobiles sont liés à un même repère, quelle est la vitesse de l'un par rapport à l'autre ?

Quand est-il lorsque deux observateurs liés à deux repères différents qui sont en mouvement l'un par rapport à l'autre ?

La position, la trajectoire, la vitesse et l'accélération du même mobile varient selon le repère choisi par l'observateur.

Exemple : Soit un point matériel collé sur la jante d'une roue de bicyclette :

- Par rapport à un repère terrestre : le mouvement n'est pas uniforme et la trajectoire est une suite de courbes appelées cycloïdes.
- Par rapport à un repère lié à l'axe de la roue : le mouvement est uniforme et la trajectoire est circulaire.

Il est très intéressant de connaître comment sont reliées les observations enregistrées par deux observateurs liés à deux repères différents, l'un en mouvement par rapport à l'autre.

1/ VITESSE RELATIVE DE DEUX MOBILES :

Soient A et B, deux points matériels en mouvement dans le repère $OXYZ$. On suppose la présence d'un observateur au point O. Figure 4.16.

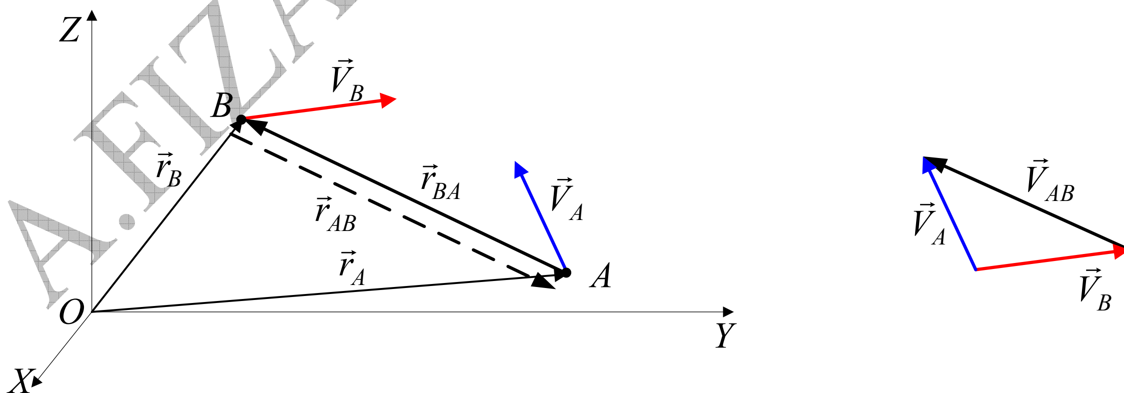


Fig 4.16: vitesse relative de deux mobiles

La vitesse de A par rapport à l'observateur O est $\overrightarrow{V_A} = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt}$.

Nous définissons sa vitesse par rapport à B comme étant $\vec{V}_{AB} = \dfrac{d\vec{r}_{AB}}{dt}$, tel que :

$$\vec{r}_{AB} = \overrightarrow{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B \, .$$

D'où :

$$\vec{V}_{AB} = \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} - \frac{d\vec{r}_B}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B} \qquad \textbf{(4.52)}$$

La vitesse de B par rapport à l'observateur O est $\overrightarrow{V_B} = \dfrac{d\vec{r}_B}{dt}$.

Nous définissons sa vitesse par rapport à A comme étant $\vec{V}_{BA} = \dfrac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$, tel que :

$$\vec{r}_{BA} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

D'où :

$$\vec{V}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A} \qquad \textbf{(4.53)}$$

Remarquons que $\vec{V}_{AB} = -\vec{V}_{BA}$, c'est-à-dire que la vitesse de A par rapport à B est égale à la vitesse de B par rapport à A, mais les deux vitesses sont de sens opposés .

On obtient les deux accélérations relatives des deux points matériels mobiles en dérivant, par rapport au temps, chacune des deux expressions des vitesses relatives posées précédemment :

$$\vec{a}_{AB} = \frac{d\vec{V}_{AB}}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} - \frac{d\vec{V}_B}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{AB} = \vec{a}_A - \vec{a}_B} \qquad \textbf{(4.54)}$$

$$\vec{a}_{BA} = \frac{d\vec{V}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{V}_B}{dt} - \frac{d\vec{V}_A}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A} \qquad \textbf{(4.55)}$$

Là aussi, il faut remarquer que $\vec{a}_{AB} = -\vec{a}_{BA}$, c'est-à-dire que les deux accélérations sont égales mais de sens contraires.

Exemple 4.11 :

1/ Deux voitures A et B roulent dans deux voies d'une autoroute rectiligne avec les vitesses respectives $110 km.h^{-1}$ et $90 km.h^{-1}$. Déterminer le vecteur vitesse relative de A par rapport à B dans les deux cas suivants :

a/ les deux voitures roulent dans la même direction,

b/ les deux voitures roulent en sens inverses.

2/ Les deux voitures roulent maintenant sur deux routes qui se coupent formant entre elles un angle de $30°$. Déterminer le vecteur vitesse relative de B par rapport à A.

Réponse :

1/ a/ La vitesse de la voiture A par rapport à la voiture B est : $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$. En considérant $\vec{e}$ comme vecteur unitaire ; les deux vitesses sont parallèles et sont de même sens que $\vec{e}$ (figure 4.17-a-).

Donc : $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 110\vec{e} - 90\vec{e} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{AB} = 20\vec{e} \Rightarrow v_{AB} = 20 km.h^{-1}}$

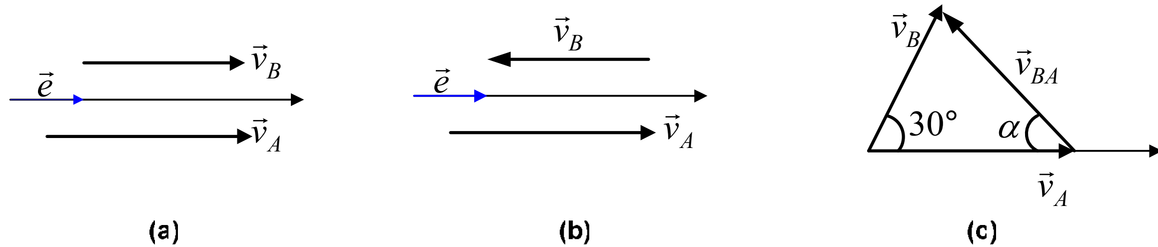


Fig 4.17

b/ Dans ce cas les vitesses sont parallèles mais de sens contraires (figure 4.17-b-) :

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 110\vec{e} - (-90\vec{e}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{AB} = 200\vec{e} \Rightarrow v_{AB} = 200 km.h^{-1}}$$

2/ Vitesse relative de B par rapport à A lorsque les deux routes se coupent (voir figure 4.17-c-) :

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \Rightarrow v_{BA} = \left(v_B^2 + v_A^2 - 2v_A v_B \cos 30°\right)^{1/2}$$

$$v_{AB} = \left(110^2 + 90^2 - 2.110.90.0,87\right)^{1/2} \quad , \quad \boxed{v_{AB} = 54,5 km.h^{-1}}$$

Pour déterminer la direction du vecteur vitesse relative $\vec{v}_{AB}$ il suffit de calculer l'angle α en appliquant la loi des sinus :

$$\frac{v_{BA}}{\sin 30°} = \frac{v_B}{\sin\alpha} \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{v_B}{v_{BA}}\sin 30°} \quad \sin\alpha = \frac{90}{54,5}.0,5 \simeq 0,82 \Rightarrow \boxed{\alpha = 55,1°}$$

Cela veut dire que le passager à bord de la voiture A voit la voiture B rouler à sa gauche sous un angle de $55,1°$ (d'après la figure 4.17—c-) et à la vitesse de $54,5 km.h^{-1}$. Quant au passager à bord de la voiture B, il voit la voiture A rouler à sa droite avec la vitesse de $54,5 km.h^{-1}$, mais sous un angle de $180 - (30° + 55,1°) = 94,9°$.

Nous venons de voir comment calculer la vitesse d'un mobile par rapport à un autre mobile, les deux mobiles étant liés au même repère. Mais quand est-il lorsque deux observateurs sont liés à deux repères différents, l'un en mouvement par rapport à l'autre ? Nous allons essayer de répondre, dans ce qui suit, à cette question.

3/ CONVENTIONS ET SYMBOLES :

Considérons les deux repères (Ra), (Rr) et deux observateurs chacun d'eux étant lié à l'un des deux repères. Figure 4.18.

Ra : Repère absolu (معلم المطلق) que nous considérons fixe.

R : Repère relatif(المعلم النسبي) en mouvement par rapport à Ra.

M : Point matériel en mouvement par rapport aux deux repères.

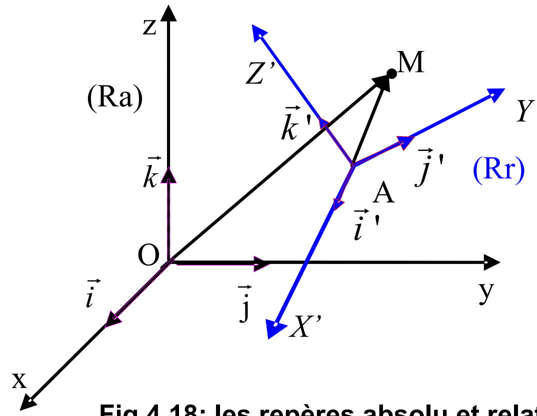


Fig 4.18: les repères absolu et relatif

Chaque observateur enregistre ses observations. Nous consignons dans le tableau suivant ces résultats :

Observateur	Dans le repère (Ra) $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ invariants dans Ra	Dans le repère (Rr) $\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'$ Variables prp à Ra
Position	$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$	$\vec{r}\,'=\overrightarrow{AM}$
La vitesse	$\vec{v}_a=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{v}_r=\dfrac{d\vec{r}\,'}{dt}$
L'accélération	$\vec{a}_a=\dfrac{d\vec{v}_a}{dt}$	$\vec{a}_r=\dfrac{d\vec{v}_r}{dt}$

Remarque importante : Nous avons supposé dans notre étude précédente que $t=t'$, c'est-à-dire que les deux observateurs utilisent le même temps ; cela veut dire que le temps ne dépend pas du mouvement. Cela paraît tout à fait raisonnable, mais l'expérience peut prouver le contraire. Cette supposition ne peut être acceptable que dans le cas des petites vitesses par rapport à la célérité de la lumière, et c'est cela que nous considérerons dans tout ce qui suit.

- **Relation entre les positions :**

Sur la figure 4.18, on peut voir :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}} \qquad \textbf{(4.56)}$$

$$\underbrace{x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}}_{\overrightarrow{OM}}=\underbrace{(x_A.\vec{i}+y_A.\vec{j}+z_A.\vec{k})}_{\overrightarrow{OA}}+\underbrace{\left(x'.\vec{i}\,'+y'.\vec{j}\,'+z'.\vec{k}\,'\right)}_{\overrightarrow{AM}}$$

- **Relation entre les vitesses :**

En dérivant la relation (56.4) par rapport au temps, on obtient la relation entre les différentes vitesses :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}+x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}+\vec{i}\,'\frac{dx'}{dt}+\vec{j}\,'\frac{dy'}{dt}+\vec{k}\,'\frac{dz'}{dt}$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a}=\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}+x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}}_{\vec{v}_e}+\underbrace{\vec{i}\,'\frac{dx'}{dt}+\vec{j}\,'\frac{dy'}{dt}+\vec{k}\,'\frac{dz'}{dt}}_{\vec{v}_r}} \qquad \textbf{(4.57)}$$

$\vec{v}_a$: La vitesse absolue (**السرعة المطلقة**) : c'est la vitesse de M par rapport au repère (Ra) .

$\vec{v}_e$: Vitesse d'entraînement (**سرعة الجر**) : c'est la vitesse du repère mobile (Rr) par rapport au repère absolu fixe (Ra), qu'on peut considérer aussi comme étant la vitesse absolue $\vec{v}_a$ du mobile M dans (Ra) si les coordonnées de M dans (Rr) sont constantes, c'est-à-dire si M est fixe par rapport à (Rr) : $\vec{v}_r=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}_e=\vec{v}_a$

$\vec{v}$: Vitesse relative (**السرعة النسبية**), c'est la vitesse du point M par rapport au repère (Rr). Nous pouvons la considérer comme étant la vitesse absolue $\vec{v}_a$ du mobile M dans (Ra) si le repère (Rr) est fixe par rapport au repère (Ra) : $\vec{v}_e=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}_r=\vec{v}_a$

La relation qui lie les trois vitesses et qu'on appelle **loi de composition des vitesses** est :

$$\boxed{\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r} \qquad \textbf{(4.58)}$$

Le vecteur de la vitesse absolue est égal à la somme des vecteurs de la vitesse d'entraînement et celui de la vitesse relative.

Remarques :

- Si (Ra) et (Rr) sont fixes l'un par rapport à l'autre $(\vec{v}_e=\vec{0})$, alors les deux observateurs enregistrent les mêmes vitesses, donc les mêmes trajectoires bien que les vecteurs position soient différents $(\overrightarrow{OM}\neq\overrightarrow{OA})$.
- Si (Rr) est en mouvement de translation (quel soit uniforme ou non) par rapport au repère (Ra) tels que $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ soient constants, alors $\vec{v}_e$ est indépendante de M .

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}=\frac{d\vec{j}\,'}{dt}=\frac{d\vec{k}\,'}{dt}=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}_e=\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}$$

❖ **Relation entre les accélérations :**

En ordonnant après avoir dérivé par rapport au temps l'expression (4.57) on obtient la relation entre les différentes accélérations par rapport aux deux repères :

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}\right] \rightarrow \vec{a}_e$$
$$+\left[\vec{i}\,'\frac{d^2x'}{dt^2} + \vec{j}\,'\frac{d^2y'}{dt^2} + \vec{k}\,'\frac{d^2z'}{dt^2}\right] \rightarrow \vec{a}_r \qquad \textbf{(4.59)}$$
$$+2\left[\frac{dx'.d\vec{i}\,'}{dt^2} + \frac{dy'.d\vec{j}\,'}{dt^2} + \frac{dz'.d\vec{k}\,'}{dt^2}\right] \rightarrow \vec{a}_C$$

$\vec{a}_a$: accélération absolue (التسارع المطلق) : c'est l'accélération de M par rapport au repère (Ra) .

$\vec{a}$: accélération relative(التسارع النسبي) : c'est l'accélération de M par rapport au repère (Rr).

$\vec{a}_e$: accélération d'entraînement(تسارع الجر) : c'est l'accélération du repère (Rr) par rapport au repère (Ra) .

$\vec{a}_C$: accélération de Coriolis(تسارع كوريوليس) : c'est une accélération complémentaire appelée **accélération de Coriolis** en mémoire à son auteur (Gaspard Coriolis 1792-1843) qui l'a établie en 1832.

L'accélération de Coriolis s'annule dans les cas suivants :

- Si M est fixe par rapport au repère (Rr) : $\frac{dx'}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dz'}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_C = \vec{0}$
- Si le repère (Rr) est en translation (même variée) par rapport au repère (Ra) :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} \\ \frac{d\vec{i}\,'}{dt} = \frac{d\vec{j}\,'}{dt} = \frac{d\vec{k}\,'}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_c = \vec{0} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$$

Exemple 4.12 : Des flocons de neige tombent verticalement avec une vitesse de $8ms^{-1}$. Avec quelle vitesse ces flocons frappent-ils le pare-brise d'une voiture roulant avec une vitesse de $50km.h^{-1}$.

Réponse :

$\vec{v}_e$:Vitesse de la voiture par rapport au sol, c'est à dire la vitesse d'entraînement.
$\vec{v}_a$:Vitesse des flocons par rapport au sol, c'est à dire la vitesse absolue.
$\vec{v}$:Vitesse des flocons par rapport à la voiture, c'est à dire la vitesse relative.

Sur la figure 4.19 on peut voir:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e \quad ; \quad \vec{v}_r = \vec{v}_a + \left(-\vec{v}_e\right)$$

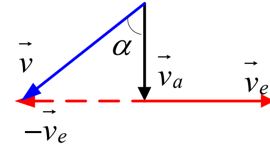


Fig 4.19

Transformons la vitesse de la voiture: $50km.h^{-1} = 13,9ms^{-1}$

Passons à l'application numérique: $\boxed{v_r = \left(v_a^2 + v_e^2\right)^{1/2}}$ $\boxed{v_r = 16ms^{-1}}$

Pour déterminer la direction du vecteur de la vitesse relative on doit calculer la tangente de l'angle α

$$tg\alpha = \frac{v_e}{v_a} = 1,74 \Rightarrow \boxed{\alpha = 60,1°}$$

Cela veut dire que les flocons de neige tombent avec la vitesse de $16ms^{-1}$ sous un angle de

$$\alpha = 60,1°$$

Exemple 4.13 : Un bateau prend la mer en direction du Nord 60° Ouest $(N60°O)$ à la vitesse de $4km.h^{-1}$ par rapport à l'eau. La direction du courant d'eau est tel que le mouvement résultant par rapport à la terre s'effectue dans la direction de l' Ouest à la vitesse de $5km.h^{-1}$. Calculer la vitesse et la direction du courant d'eau par rapport au sol.

Réponse : La première des choses à faire est de dessiner la figure 4.20. Sans dessin rien ne peut être tenté pour résoudre l'exercice.

Si l'énoncé a été bien compris, il faut calculer le module et la direction du vecteur de la vitesse d'entraînement.

$\vec{v}_a$: La vitesse absolue, c'est-à-dire la vitesse du bateau par rapport au sol.

$\vec{v}_e$: la vitesse d'entraînement, c'est-à-dire la vitesse du courant d'eau par rapport au sol.

$\vec{v}$: la vitesse relative, c'est-à-dire la vitesse du bateau par rapport à l'eau de mer.

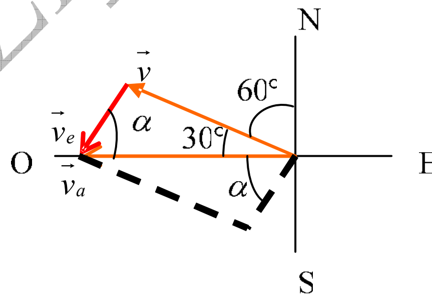


Fig 4.20

Partant de la figure 4.20 et de la loi de composition des vitesses, nous pouvons écrire :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r$$

$$\boxed{v_e = \left[v_a{}^2 + v_r{}^2 - 2v_a.v_r.\cos 30°\right]^{1/2}}$$

Application numérique : $\boxed{v_e = 2,52km.h^{-1}}$

Pour déterminer la direction de $\vec{v}_e$ il est nécessaire de calculer l'angle α en faisant appel à la loi des sinus :

$$\frac{v_r}{\sin\alpha} = \frac{v_e}{\sin 30°} \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{v_r}{v_e}.\sin\alpha} \quad ; \quad \sin\alpha = 0{,}4 \Rightarrow \boxed{\alpha = 23{,}6°}$$

Cela veut dire que la direction du vecteur de la vitesse de l'eau de mer par rapport à le sol fait un angle de $23{,}6°$ avec l'axe Ouest Est vers le Sud soit $O23.6°S$.

4/ CAS DU MOUVEMENT DE ROTATION:

❖ Relation entre les vitesses :

Nous pouvons considérer la vitesse angulaire comme étant une **grandeur vectorielle,** telle que sa direction soit orthogonale au plan du mouvement et dont le sens est défini par la règle de la main droite (ou toute autre règle correspondante) qui indique le sens du vecteur résultant du produit vectoriel.

D'après la figure 4.21 nous pouvons écrire :

$$R = r.\sin\alpha$$

Sachant que $v = \omega.R$

Donc $v = \omega R \sin\alpha$

Dés lors nous pouvons écrire :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \Leftrightarrow v = \omega.r.\sin\alpha} \qquad \textbf{(4.60)}$$

Il est donc justifié d'écrire : $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}.\vec{k}$

Sur la figure (4.22), considérons deux observateurs : l'observateur O lié au repère R et l'observateur O' lié au repère R' . Les deux observateurs sont en mouvement de rotation, sans translation, l'un par rapport à l'autre.

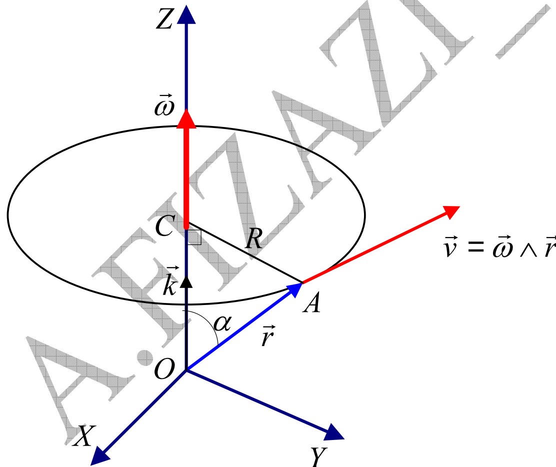


Fig 4.21: Le vecteur de la vitesse de rotation

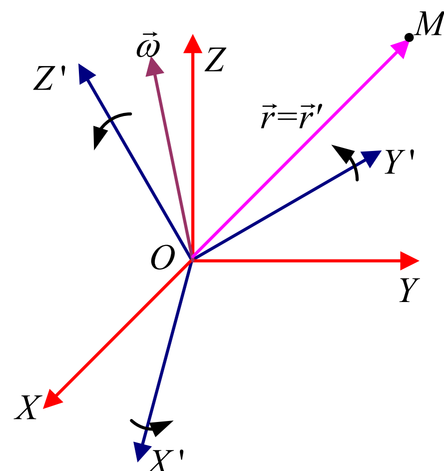


Fig 4.22: Deux référentiels en mouvement de rotation uniforme relatif

Chaque observateur voit le repère de l'autre observateur tourner avec une vitesse angulaire ω .

Pour l'observateur O lié au repère $OXYZ$, la vitesse du point matériel M est la dérivée de l'expression du vecteur position :

$$\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_a = \frac{dx}{dt}.\vec{i} + \frac{dy}{dt}.\vec{j} + \frac{dz}{dt}.\vec{k} \qquad \textbf{(4.61)}$$

Pour l'observateur O' lié au repère $OX'Y'Z'$ (remarquez que les deux repères ont la même origine, c'est-à-dire O' confondu avec O), la vitesse du point matériel M est la dérivée de son vecteur position, soit :

$$\vec{r}' = \vec{r} = x'.\vec{i}' + y'.\vec{j}' + z'.\vec{k}' \Rightarrow \vec{v}_r = \frac{dx'}{dt}.\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}.\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}.\vec{k}' \qquad \textbf{(4.62)}$$

Pour l'observateur O, le repère $OX'Y'Z'$ tourne, donc les vecteurs unitaires $\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'$ changent de direction à chaque instant. Cet observateur écrit donc par rapport au repère R' :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx'}{dt}.\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}.\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}.\vec{k}' + x'.\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'.\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'.\frac{d\vec{k}'}{dt} \qquad \textbf{(4.63)}$$

D'autre part les extrémités des vecteurs unitaires $\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'$ effectuent un mouvement circulaire uniforme par rapport à l'observateur O avec une vitesse angulaire ω . En d'autre terme le rapport $\frac{d\vec{i}'}{dt}$ représente la vitesse d'un point situé à une distance égale à l'unité de O et se déplace avec un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire ω .

Par analogie avec l'équation(60.4) , nous pouvons écrire :

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}' \quad ; \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}' \quad ; \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}'$$

De l'équation(63.4) nous pouvons écrire :

$$x'.\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'.\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'.\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge x'.\vec{i}' + \vec{\omega} \wedge y'.\vec{j}' + \vec{\omega} \wedge z'.\vec{k}'$$

$$x'.\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'.\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'.\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge (x'.\vec{i}' + y'.\vec{j}' + z'.\vec{k}')$$

$$x'.\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'.\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'.\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad (4.64)$$

En remplaçant dans l'équation(63.4) , nous obtenons :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad \textbf{(4.65)}$$

Cette dernière expression exprime la relation entre les vitesses du point M , mesurées par les deux observateurs qui sont en mouvement relatif de rotation.

- **La vitesse de rotation instantanée :**

Nous avons vu que $\vec{\omega} = \omega.\vec{k}$. Si $\vec{\omega}$ est variable avec le temps, alors $\vec{\omega}(t) = \omega(t).\vec{k}$ représente la vitesse de rotation instantanée. Pour discerner la vitesse angulaire constante dans le mouvement circulaire uniforme de la vitesse de rotation instantanée, on note cette dernière conventionnellement par $\vec{\Omega}(t)$.

❖ Relation entre les accélérations :

Pour arriver à la relation qui entre les différentes accélérations nous allons suivre la même méthode que celle des vitesses.

L'accélération du mobile M mesurée par l'observateur O par rapport au repère $OXYZ$ est :

$$\vec{a}_a = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt} = \vec{i}.\frac{dv_x}{dt} + \vec{j}.\frac{dv_y}{dt} + \vec{k}.\frac{dv_z}{dt}$$

L'accélération du mobile M mesurée par l'observateur O' par rapport au repère $OX'Y'Z'$, sans considérer la rotation, est :

$$\vec{a}_r = \vec{i}'.\frac{dv_x'}{dt} + \vec{j}'.\frac{dv_y'}{dt} + \vec{k}'.\frac{dv_z'}{dt}$$

En dérivant l'expression 4.65, en rappelant que $\vec{\omega}$ est considérée constante, nous obtenons :

$$\vec{a}_a = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \textbf{(4.66)}$$

Puisque : $\vec{v}_r = \vec{v}' = \vec{i}'.v_x' + \vec{j}'.v_y' + \vec{k}'.v_z'$

Donc : $\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{i}'.\frac{dv_x'}{dt} + \vec{j}'.\frac{dv_y'}{dt} + \vec{k}'.\frac{dv_z'}{dt} + v_x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + v_y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + v_z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$

De la même façon que nous avons obtenu l'équation 4.64 , nous arrivons à :

$$\vec{i}'.\frac{dv_x'}{dt} + \vec{j}'.\frac{dv_y'}{dt} + \vec{k}'.\frac{dv_z'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

Nous avons aussi : $v_x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + v_y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + v_z'\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{a}$

D'où :

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' \qquad \textbf{(4.67)}$$

De même :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{v_a} = \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{v} \qquad \textbf{(4.68)}$$

Tel que :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_a = \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)$$

$$\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right) \qquad \textbf{(4.69)}$$

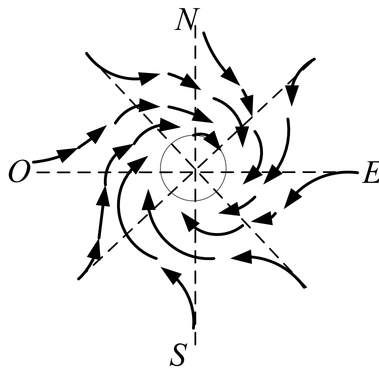
Par substitution des résultas 4.67 et 4.68 dans l'équation 4.69 on obtient en fin de compte l'équation 4.70 qui nous donne la relation entre les différentes accélérations du mobile M mesurées par les deux observateurs O et O', lesquels sont en mouvement relatif de rotation **uniforme**.

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)} \qquad \textbf{(4.70)}$$

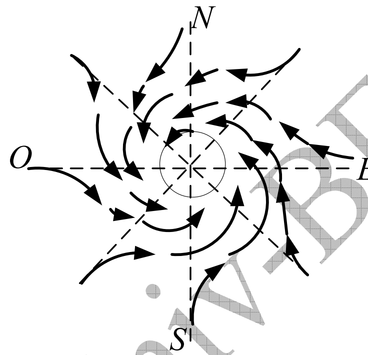
Le terme $2\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ s'appelle accélération de Coriolis, et le terme $\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)$ représente une accélération centripète.

Ces deux accélérations (Coriolis et centripète) résultent du mouvement relatif de **rotation** des deux observateurs.

Ces deux accélérations se manifestent au cours du mouvement de rotation des vents et des cyclones (photo4.1), et même dans l'eau qui est absorbée par le siphon du lavabo par exemple. Le mouvement de rotation apparaît clairement, son sens varie selon la région du globe terrestre où a lieu l'événement. Dans l'hémisphère nord la rotation s'effectue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, par contre dans l'hémisphère sud le sens de la rotation se fait dans le sens des aiguilles d'une montre. Figure 4.23



Dans l 'hémisphère sud du globe



Dans l 'hémisphère nord du globe

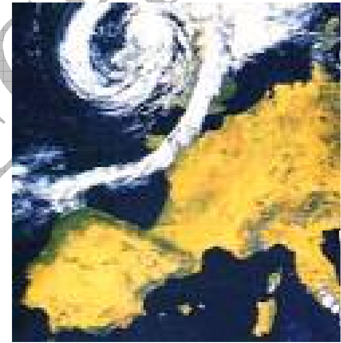


Fig 4.23: Sens de rotation d'un cyclone ou d'une tornade

Photo 4.1

Nous clôturons ce chapitre en signalant le cas du **mouvement de rotation non uniforme.**

En revenant à l'expression 4.59, l'accélération d'entraînement est :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}$$

En posant $\overrightarrow{OA} = \vec{r}\,'$ nous pouvons écrire :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left[\underbrace{x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt^2}}_{\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'}\right] = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\,'\right)$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \underbrace{\frac{d\vec{r}\,'}{dt}}_{\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'} \wedge \vec{\omega}$$

$$\boxed{\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}\,' + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\,'\right)} \qquad \textbf{(4.71)}$$

Observons que l'accélération d'entraînement renferme trois termes :

$\dfrac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}$: accélération du mouvement de translation de l'origine A du référentiel (Rr) par rapport au repère absolu (Ra) ,

$\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}\,'$: accélération résultant de la non uniformité de la rotation de (Rr) par rapport au référentiel (Ra) , c'est-à-dire résultant de l'accélération angulaire du référentiel (Rr) ,

$\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'$: accélération centripète dirigée vers l'axe de rotation.

CONCLUSION : **en introduisant le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ les deux lois de composition des vitesses et des accélérations, dans le cas général, prennent les formes respectives :**

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \Leftrightarrow \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}}_{\vec{v}_r} + \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AM}\right)}_{\vec{v}_e} \tag{4.72}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e$$

$$\underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}_{\vec{a}_a} = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{AM}}{dt^2}}_{\vec{a}_r} + \underbrace{2.\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r}_{\vec{a}_c} + \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{AM} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\right)}_{\vec{a}_e} \tag{4.73}$$